

1. Imamo štiri trapeze $ABCD$. V vsakem izmed njih merita osnovnici $|AB| = a = 16$ cm in $|CD| = c = 2$ cm.
 - 1.1. V prvem trapezu tvorijo dolžine stranic c, d, b, a aritmetično zaporedje. Izračunajte dolžini krakov $b = |BC|$ in $d = |AD|$.
(5 točk)
 - 1.2. V drugem trapezu se nosilki krakov sekata v točki E . Izračunajte dolžino kraka b , če merita daljici $|CE| = 2$ cm in $|DE| = 1$ cm.
(5 točk)
 - 1.3. V tretjem trapezu kot $\sphericalangle DAB$ meri $a = 70^\circ$, kot $\sphericalangle ABC$ pa $b = 60^\circ$. Izračunajte dolžino kraka d .
(6 točk)
 - 1.4. V četrtem trapezu je krak b za 2 cm daljši od kraka d , ploščina trapeza pa meri 108 cm^2 . Izračunajte dolžini krakov b in d .
(9 točk)

2. Prva dva člena neskončne geometrijske vrste sta $a_1 = x$ in $a_2 = x^2 - x$ ($x \in \mathbb{R}; x \neq 0, x \neq 1$).
 - 2.1. Za katere vrednosti x je vrsta konvergentna (ima vsoto)?
(5 točk)
 - 2.2. Izračunajte x tako, da bo vsota vrste enaka 5.
(4 točke)
 - 2.3. Izračunajte x tako, da bo $4a_1^4 + a_2 = 0$.
(5 točk)
 - 2.4. Naj bo $x = \frac{4}{3}$. Koliko začetnih členov te vrste moramo sešteti, da se bo njihova vsota za manj kakor 10^{-8} razlikovala od vsote neskončne vrste? Odgovor napišite s stavkom.
(10 točk)

3. Naj bo $\frac{x+1}{x} + \left(\frac{x+1}{x}\right)^2 + \left(\frac{x+1}{x}\right)^3 + \dots$ ($x \neq 0, x \neq -1$) neskončna geometrijska vrsta.
 - 3.1. Izračunajte točno vsoto vrste za $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.
(4 točke)
 - 3.2. Za katero število x je vsota vrste enaka 1?
(3 točke)

3.3. Izračunajte, za katere vrednosti x je dana vrsta konvergentna.

(5 točk)

4. Rešite naslednje tri naloge iz aritmetičnih zaporedij.

4.1. Izračunajte x in y , če so 9 , x , y in 1 zaporedni členi aritmetičnega zaporedja.

(3 točke)

4.2. Izračunajte n , če velja $\log 3 + \log 9 + \log 27 + \dots + \log 3^{99} = \log 3^n$.

(4 točke)

4.3. Vsota prvih petih členov nekega aritmetičnega zaporedja je 25 . Med takimi zaporedji izberite tistega, ki ima vsoto kvadratov prvih treh členov najmanjšo, in zapišite njegovih prvih pet členov.

(6 točk)

5. Naj bo $a_1, a_3, \frac{1}{4}, \dots$ geometrijsko zaporedje s samimi pozitivnimi členi.

5.1. Izračunajte člena a_1 in a_3 ter zapišite splošni člen tega zaporedja.

(3 točke)

5.2. Izračunajte, med katerima zaporednima členoma zaporedja je število 10^{-9} . Napišite odgovor.

(4 točke)

5.3. Dokažite, da je vsota $\sum_{k=1}^{50} a_{2k} = a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{100}$ enaka $\frac{4}{3}(1 - 2^{-100})$.

(3 točke)

5.4. Izračunajte vsoto vrste $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^3 = a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + \dots$.

(3 točke)

6. Dana je geometrijska vrsta $3 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} - \frac{x^3}{72} + \dots$, $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$.

6.1. Za katera realna števila x je ta vrsta konvergentna?

(2 točki)

6.2. Izračunajte število $x \in \mathbb{R}$, za katero je vsota te vrste enaka $2x - 4$.

(3 točke)

- 6.3. Naj bo $x = -1$. Koliko odstotkov vsote vseh členov te vrste predstavlja vsota prvih petih členov? Rezultat zaokrožite na 5 mest. (3 točke)
- 6.4. Naj bo $x = -1$. Kateri členi te vrste so manjši od 10^{-8} ? Napišite odgovor. (4 točke)
7. Dana je geometrijska vrsta $4^x + 4^{2x} + 4^{3x} + \dots$.
- 7.1. Za katera realna števila x vrsta konvergira? (3 točke)
- 7.2. Izračunajte x , da bo vsota vrste enaka dvakratniku prvega člena. (3 točke)
- 7.3. Izračunajte x tako, da bo kvadrat prvega člena vrste enak sedemkratniku petega člena. Rezultat zaokrožite na pet mest. (3 točke)
- 7.4. Za $x = -1$ zapišite vsoto S_n prvih n členov vrste. Najmanj koliko členov vrste moramo sešteti, da se bo vsota S_n od vsote neskončne vrste razlikovala za manj kot 10^{-10} ? (5 točk)
8. Dano je zaporedje s splošnim členom $a_n = \sqrt{n^2 + 4n} - n, n \in \mathbb{N}$.
- 8.1. Računsko pokažite, da število 1.97 ni člen danega zaporedja. (3 točke)
- 8.2. Izračunajte limito zaporedja. (4 točke)
- 8.3. Kateri členi niso v e -okolici števila 2 , če je $e = \frac{1}{10}$? Zapišite odgovor. (4 točke)
9. V spodnjih nalogah upoštevajte lastnosti binomskih simbolov.
- 9.1. Za katera naravna števila n so $n+6, \binom{n}{2}, \binom{n}{3}$ prvi trije členi geometrijskega zaporedja? (4 točke)
- 9.2. Imamo polinom $p(x) = (2+x)^n = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$. Za katero naravno število n ($n > 1$) sta koeficienta a_{n-1} in a_{n-2} tega polinoma enaka? (4 točke)

- 9.3. V ravnini so narisane tri različne vzporedne premice p , q in r ter 12 različnih točk: 5 točk leži na premici p , 4 točke na premici q , 3 točke pa na premici r . Koliko trikotnikov z oglišči v teh točkah lahko narišemo, če naj ena stranica trikotnika leži na premici p ? Koliko trapezov z oglišči v teh točkah lahko narišemo, če naj ena osnovnica trapeza leži na premici p ?

(4 točke)

10. Dano je geometrijsko zaporedje $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \dots$. Splošni člen označimo z a_n .

10.1. Izračunajte vsoto geometrijske vrste $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots$

(3 točke)

10.2. Zapišite splošni člen a_n danega zaporedja. Kateri člen tega zaporedja je enak 2^{-2012} ?

(3 točke)

10.3. Ugotovite, kateri členi zaporedja $b_n = a_n^{-1}$ so večji od 10^{20} in manjši od 10^{30} .

(3 točke)

10.4. Zapišite splošni člen aritmetičnega zaporedja $c_n = \log_2(a_n^{-1})$. Seštejte prvih trideset členov tega zaporedja.

(3 točke)

11. Rešite te naloge iz aritmetičnih zaporedij:

11.1. Za katera realna števila x je zaporedje $x - 5, \frac{1}{2}(x - 1), x^2 - 5$ aritmetično?

(3 točke)

11.2. Kolikšna je vsota vseh naravnih števil med 1000 in 10000, deljivih s 17?

(4 točke)

11.3. Dolžine stranic trikotnika oblikujejo aritmetično zaporedje, srednja meri 7,5 cm. Ploščina trikotnika je enaka $\frac{15\sqrt{33}}{4} \text{ cm}^2$. Natančno izračunajte dolžini najkrajše in najdaljše stranice trikotnika.

(4 točke)

11.4. Zapišite prvi člen a_1 , razliko d in splošni člen a_n aritmetičnega zaporedja, ki ima vsoto prvih n členov enako $S_n = 2n^2 + 3n$.

(3 točke)

12. Rešite te naloge iz zaporedij:

12.1. Stranice pravokotnega trikotnika oblikujejo aritmetično zaporedje z diferenco 3. Izračunajte stranice tega trikotnika.

(2 točki)

12.2. Dokažite, da ima enačba $ax^2 + 2bx + c = 0$ realne rešitve, če so realna števila a, b, c zaporedni členi aritmetičnega zaporedja.

(3 točke)

12.3. Koliko rešitev ima enačba $ax^2 + 2bx + c = 0$, če so realna števila a, b, c zaporedni členi geometrijskega zaporedja?

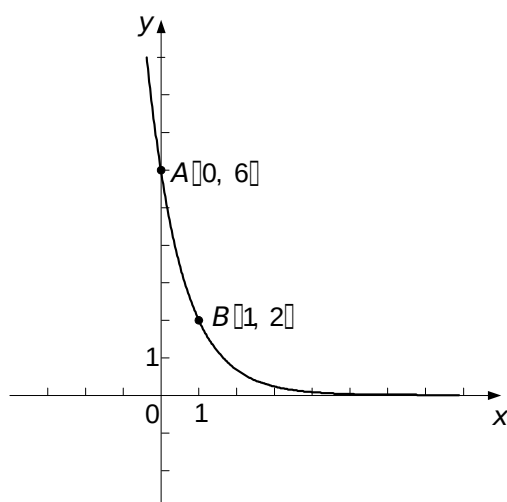
(3 točke)

12.4. V zaporedju štirih realnih števil prva tri oblikujejo geometrijsko zaporedje, zadnja tri pa aritmetično zaporedje. Vsota prvega in zadnjega števila je 14, vsota srednjih dveh pa 12. Izračunajte ta štiri števila.

(4 točke)

13. V spodnjem koordinatnem sistemu je narisana graf funkcije s predpisom

$$f(x) = 2 \cdot a^{1+bx}$$



13.1. Izračunajte vrednosti parametrov a in b .

(4 točke)

13.2. Tabelirajte funkcijo $h: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$, definirano s predpisom $h(n) = 2 \cdot 8^{1/n}$ od 1 do 4. Vrednosti zapišite v obliki ulomka.

n				
$h(n)$				

(1 točka)

13.3. Pokažite, da tvorijo vrednosti $a_n = h(n) = 2 \cdot 3^{1-n}$ geometrijsko zaporedje, in izračunajte količnik danega geometrijskega zaporedja. Koliko členov v tem zaporedju je večjih od $2 \cdot 10^{-2013}$?

(4 točke)

13.4. S popolno indukcijo dokažite, da je vsota prvih n členov danega geometrijskega zaporedja s splošnim členom $a_n = 2 \cdot 3^{1-n}$ enaka $S_n = 3 - 3^{1-n}$.

(4 točke)

14. Rešite te naloge:

14.1. Dan je trikotnik $DMNP$ s podatki: $|MP| = 7$, $|PN| = 6,5$, kot $\sphericalangle PMN$ meri 60° . Izračunajte obe mogoči dolžini stranice MN . Rezultata zaokrožite na dve decimalki.

(4 točke)

14.2. Dolžine stranic trikotnika so trije zaporedni členi aritmetičnega zaporedja z diferenco $d = 1$. Izračunajte dolžine stranic, če meri največji kot trikotnika 120° .

(4 točke)

14.3. V trikotniku $DABC$ merita stranici $a = |BC| = 5$ in $b = |AC| = 4$. Med kotoma a in b velja zveza $a = 2b$. Izračunajte ploščino trikotnika $DABC$. Rezultat zaokrožite na dve decimalki.

(5 točk)

15. Dana je realna funkcija f s predpisom $f(x) = 2^x$.

15.1. Rešite enačbo $f(x) + f(2x) = f(x+2)$. Rezultat naj bo točen.

(3 točke)

15.2. Dokažite, da velja $(f(1) + f(1)) \cdot 2 = f(1) + f(1)$.

(3 točke)

15.3. Izračunajte vsoto $\sum_{n=1}^{10} f(n) = f(1) + f(2) + \dots + f(10)$.

(3 točke)

15.4. Kdaj konvergira vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} f(nx)$? Izračunajte $x \in \mathbb{R}$, da bo vsota te vrste enaka 1.

(4 točke)

16. Naj bo $\{a_n\}$ geometrijsko zaporedje s kvocientom $q = e^2$ in prvim členom $a_1 = 1$.
Naj bo dano še zaporedje s splošnim členom $b_n = \ln(a_n)$.

16.1. Zapišite splošni člen zaporedja $\{a_n\}$ in dokažite, da je zaporedje $\{b_n\}$ aritmetično z diferenco $d = 2$.

(4 točke)

16.2. Izračunajte vsoto prvih 100 členov zaporedja $\{b_n\}$.

(2 točki)

16.3. Dokažite, da za poljuben par naravnih števil m, n velja, da b_m in b_n nista tuji si števili.

(3 točke)

16.4. Naj bo za vsako naravno število n p_n polinom, definiran s predpisom $p_n(x) = b_1 + b_2x + b_3x^2 + \dots + b_{n+1}x^n$. Dokažite, da ima za vsako naravno število n polinom p_n na intervalu $[0, \infty)$ natanko eno ničlo.

(4 točke)

17. Rešite naslednje naloge iz geometrije.

17.1. V krog s polmerom $3,75 \text{ cm}$ včrtamo pravokotnik, katerega stranici sta v razmerju $4:3$. Izračunajte obseg pravokotnika. Koliko odstotkov ploščine kroga predstavlja ploščina pravokotnika?

(3 točke)

17.2. V rombu je razlika dolžin diagonal 2 cm , njegova ploščina pa meri 20 cm^2 . Izračunajte dolžini diagonal in njegovo stranico. Rezultati naj bodo točni.

(6 točk)

17.3. Stranice trikotnika predstavljajo prve tri člene aritmetičnega zaporedja z diferenco 4. Ploščina trikotnika je 96 cm^2 . Izračunajte dolžine stranic.

(4 točke)

18. Rešite naslednje naloge iz zaporedij.

18.1. Trije zaporedni členi naraščajočega geometrijskega zaporedja imajo vsoto 52. Če prvemu členu prištejemo 1, drugemu 8, tretjega pa zmanjšamo za 1, dobimo zaporedne člene aritmetičnega zaporedja. Izračunajte prve tri člene obeh zaporedij. (Uganjene rešitve ne bodo točkovane.)

(6 točk)

18.2. Notranji koti trikotnika a , b in g so zaporedni členi aritmetičnega zaporedja. Dokažite, da za stranice a , b in c tega trikotnika velja zveza $a^2 - ac + c^2 = b^2$.

(3 točke)

18.3. Izračunajte vse vrednosti parametra m , $m > 0$, da bodo rešitve enačbe $x^4 - (1+m^2)x^2 + m^2 = 0$ zaporedni členi aritmetičnega zaporedja.

(5 točk)

19. Dana je funkcija $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ s predpisom $f(x) = 2\ln x$.

19.1. Rešite enačbo $2f(x) = f(2x)$.

(3 točke)

19.2. Dokažite, da je $f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{2}{3}\right) = f\left(\frac{1}{3}\right)$.

(3 točke)

19.3. Dokažite z matematično (popolno) indukcijo, da za vsako naravno število n

velja $f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{2}{3}\right) + f\left(\frac{3}{4}\right) + \dots + f\left(\frac{n}{n+1}\right) = f\left(\frac{1}{n+1}\right)$.

(4 točke)

19.4. Ali je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{n}{n+1}\right)$ konvergentna? Odgovor utemeljite.

(3 točke)

Rešitev

1. Skupaj: 25 točk

1.1. (5 točk)

Upoštevana definicija aritmetičnega zaporedja.....1 točka

Izračunana diferenca aritmetičnega zaporedja $d = 4\frac{2}{3}$ cm(*1+1) 2 točki

Rezultat $b = 11\frac{1}{3}$ cm, $d = 6\frac{2}{3}$ cm(1+1) 2 točki

1.2. (5 točk)

Skica..... 2 točki

Zapisano razmerje, npr. $\frac{b+2}{2} = \frac{16}{2}$ 2 točki

(Le ugotovitev, da sta trikotnika ABE in DCE podobna ... 1 točka.)

Rezultat $b = 14$ cm1 točka

1.3. (6 točk)

Skica z vzporedno premaknjeno stranico.....1 točka

Izračunan tretji kot trikotnika (50°).....1 točka

Uporaba sinusnega izreka, npr. $d = \frac{14 \sin 60^\circ}{\sin 50^\circ}$ (*1+1) 2 točki

Rezultat $d \approx 15,83$ cm (upoštevamo tudi druge pravilno zaokrožene rezultate).....(*1+1) 2 točki

1.4. (9 točk)

Izračunana višina trapeza $v = 12$ cm2 točki

(Le formula za ploščino trapeza ... 1 točka.)

Skica z vrisano višino.....1 točka
 S pomočjo Pitagorovega izreka ali Heronovega obrazca dobljena enačba (ali sistem enačb),
 npr. $12^2 + (14 - \sqrt{d^2 - 144})^2 = (d+2)^2$ oz. $84 = \sqrt{(8+d)(d-6)}$ (*1+1) 2 točki
 Pravilno kvadriranje.....*1 točka
 Urejena kvadratna enačba, npr. $d^2 + 2d - 195 = 0$ *1 točka
 Rezultat $b = 15$ cm, $d = 13$ cm(1+1) 2 točki
 (Če kandidat pri nobenem rezultatu ne zapiše enot, se mu pri zadnjem izračunanem rezultatu odšteje 1 točka.)

Rešitev

2. Skupaj: 24 točk

2.1. (5 točk)

Ugotovitev $q = x - 1$ 1 točka
 Upoštevanje $|x - 1| < 1$ 2 točki
 (Samo $|q| < 1$... 1 točka.)
 Rešitev, npr. $x \in (0, 1) \cup (1, 2)$ (1+1) 2 točki

2.2. (4 točke)

Nastavek, npr. $\frac{x}{1 - (x - 1)} = 5$ 2 točki
 (Samo formula za vsoto ... 1 točka.)
 Rešitev $x = \frac{5}{3}$ 2 točki

2.3. (5 točk)

Zapis $4x^4 + x^2 - x = 0$ 1 točka
 Reševanje enačbe, npr. s Hornerjevim algoritmom(*1+1) 2 točki
 Rešitev $x = \frac{1}{2}$ 2 točki
 (Če kandidat ne utemelji $x = \frac{1}{2}$ je edina rešitev ... 1 točka.)

2.4. (10 točk)

Zapis, npr. $\left| \frac{\frac{4}{3}}{1 - \frac{1}{3}} - \frac{4}{3} \times \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n - 1}{\frac{1}{3} - 1} \right| < 10^{-8}$ (lahko tudi enačaj)4 točke
 (Formula za vsoto vrste ... 1 točka, formula za vsoto n členov ... 1 točka, $q = \frac{1}{3}$... 1 točka.)
 Poenostavitev do oblike, npr. $2 \times 3^{-n} < 10^{-8}$ 2 točki
 Rešitev neenačbe, npr. $n > \frac{\log(2 \times 10^8)}{\log 3}$ (*1+1) 2 točki
 Rezultat, npr. $n > 17,4$ 1 točka
 Odgovor: Sešteti moramo najmanj 18 členov1 točka

Rešitev

3. Skupaj: 12 točk

3.1. (4 točke)

Izračun (zapis), npr. $a_1 = \frac{3 - 2\sqrt{3}}{3}$ 1 točka
 Zapis ali uporaba $q = \frac{3 - 2\sqrt{3}}{3}$ oziroma $q = a_1$ 1 točka

Izračun $s = \frac{3 - 2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} - 2}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} - 1$ 2 točki
(Uporaba formule ... 1 točka.)

3.2. (3 točke)

Nastavek enačbe, npr. $\frac{\frac{x+1}{x}}{1 - \frac{x+1}{x}} = 1$ 2 točki

(Le, npr. $\frac{a_1}{1-q} = 1$... 1 točka.)

Rešitev $x = -2$ 1 točka

3.3. (5 točk)

Zapis pogoja $\left| \frac{x+1}{x} \right| < 1$ 2 točki

(Le splošni pogoj $|q| < 1$ 1 točka.)

Reševanje neenačbe2 točki

(Npr. grafično ali razdružitev v sistem dveh neenačb ... *1 točka, rešitve

posameznih neenačb sistema, npr. $\left(x < -\frac{1}{2} \right) \cup (x > 0); x < 0$... 1 točka.)

Rešitev, npr. $x \in (-\infty, -1) \cup \left(-1, -\frac{1}{2}\right)$ 1 točka

Rešitev

4. Skupaj: 13 točk

4.1. (3 točke)

1. način

Upoštevanje definicije aritmetičnega zaporedja, npr. $x - 9 = y - x$ in $y - x = 1 - y$. 1 točka

Rešitev $x = \frac{19}{3}$ in $y = \frac{11}{3}$ (*1+1) 2 točki

2. način

$1 = 9 + 3d$ ali $d = -\frac{8}{3}$ 1 točka

Rešitev $x = \frac{19}{3}$ in $y = \frac{11}{3}$ (*1+1) 2 točki

4.2. (4 točke)

Upoštevanje lastnosti logaritma potence ali vsote logaritmov ali $d = \log 3$ *1 točka

Zapis, npr. $\log 3 + 2\log 3 + 3\log 3 + \dots + 99\log 3 = (1 + 2 + 3 + \dots + 99)\log 3$ ali $\log 3^{1+2+\dots+99}$

ali $\frac{99}{2}(\log 3 + \log 3^{99})$ 1 točka

Izračunana vsota $1 + 2 + \dots + 99 = 50 \times 99 = 4950$ 1 točka

Rezultat $n = 4950$ 1 točka

4.3. (6 točk)

Zapis S_5 z a_1 in d , npr. $S_5 = 5a_1 + 10d = 25$ ali $a_1 = 5 - 2d$ 1 točka

Nastavek $S = a_1^2 + (a_1 + d)^2 + (a_1 + 2d)^2$ 1 točka

Izrazitev S z eno spremenljivko, npr. $S = (5 - 2d)^2 + (5 - d)^2 + 5^2$ *1 točka

Upoštevanje $S \neq 0$ oz. $10d - 30 = 0$ (ali računanje s temenom)*1 točka

Rešitev $d=3$ in $a_1 = -1$ 1 točka
 Zapis členov $-1, 2, 5, 8, 11$ 1 točka

Rešitev

5. Skupaj: 13 točk

5.1. (3 točke)

Zapis ali uporaba $q = \frac{1}{2}$ 1 točka

Izračunana $a_1 = 2$ in $a_3 = \frac{1}{2}$ 1 točka

Zapisan splošni člen, npr. $a_n = 2 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ ali $a_n = \frac{1}{2^{n-2}}$ 1 točka

5.2. (4 točke)

Zapisana neenačba, npr. $2 \times \frac{1}{2^{n-1}} > 10^{-9}$ (upoštevamo tudi zapis enačbe)..*1 točka

Izračun, npr. $n < \frac{9}{\log 2} + 2$ ali $n < 31,9$ (upoštevamo tudi $n \approx 31,9$).....2 točki
 (Le pravilno logaritmiranje neenačbe ... *1 točka.)

Zapisana ugotovitev, da je dano število med 31. in 32. členom zaporedja 1 točka

5.3. (3 točke)

Zapis ali uporaba količnika $\frac{1}{4}$ 1 točka

Uporaba formule za vsoto.....*1 točka

Dokazana enakost.....1 točka

5.4. (3 točke)

Zapis ali uporaba količnika $\frac{1}{8}$ 1 točka

Uporaba formule za vsoto vrste.....*1 točka

Izračunana vsota vrste $\frac{64}{7}$ 1 točka

Rešitev

6. Skupaj: 12 točk

6.1. (2 točki)

Ugotovitev, npr. $-6 < x < 6$, $x \neq 0$ 2 točki

(Le zapis, npr. $|x| < 1$... 1 točka.)

6.2. (3 točke)

Zapis ali uporaba formule $s = \frac{a_1}{1-q}$ 1 točka

Rešitvi enačbe 3 in -7 1 točka

Ugotovitev, da -7 ne ustreza.....1 točka

6.3. (3 točke)

Izračunana ali uporabljena vsota vrste $\frac{18}{5}$ 1 točka

Zapis vsote prvih petih členov, npr. $\frac{3\left(\left(\frac{1}{6}\right)^5 - 1\right)}{\frac{1}{6} - 1}$ 1 točka

Izračunan odstotek, npr. 99,987 %1 točka

6.4. (4 točke)

Zapisana neenačba, npr. $3\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} < 10^{-8}$ (zadošča tudi enačba).....1 točka

Rešitev neenačbe, npr. $n > 11,89$ (zadošča $n = 11,89$).....(1+1) 2 točki

Odgovor, npr.: »Vsi členi od vključno dvanajstega naprej.«.....1 točka

Rešitev

7. Skupaj: 14 točk

7.1. (3 točke)

Ugotovitev, da je količnik $q = 4^x$ 1 točka

Zapisan pogoj, npr. $|q| < 1$ 1 točka

Rešitev, npr. $x \in (-\infty, 0)$ 1 točka

7.2. (3 točke)

Zapisana enačba, npr. $\frac{a_1}{1-q} = 2a_1$ 1 točka

Rešitev $x = -\frac{1}{2}$ (*1+1) 2 točki

7.3. (3 točke)

Zapisana enačba, npr. $4^{2x} = 7 \cdot 4^{5x}$ 1 točka

Rešitev $x \approx -0,46789$ (točna rešitev je npr. $x = -\frac{\log 7}{3 \log 4}$).....(*1+1) 2 točki

7.4. (5 točk)

Izračunana vsota $s = \frac{1}{3}$ 1 točka

Zapisana vsota, npr. $s_n = \frac{1}{3}(1 - 4^{-n})$ 1 točka

Zapisana neenačba, npr. $\frac{1}{3} - \frac{1}{3}(1 - 4^{-n}) < 10^{-10}$ *1 točka

Rešitev $n \geq 16$ (*1+1) 2 točki

Rešitev

8. Skupaj: 11 točk

8.1. (3 točke)

Nastavitev enačbe, npr. $\sqrt{n^2 + 4n} - n = 197$ 1 točka

Izračun, npr. $n = 64,68$ 1 točka

Sklep, npr. $n \notin \mathbb{N}$ 1 točka

8.2. (4 točke)

Preoblikovanje do oblike $\frac{4n}{\sqrt{n^2 + 4n} + n}$ (*1+1) 2 točki

Deljenje števca in imenovalca z n 1 točka

Izračun $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$ 1 točka

8.3. (4 točke)

Vstavitev v neenačbo ali enačbo, npr. $|a_n - a|^3 \leq e$ 1 točka

Izračun $n \notin 18,05$ (*1+1) 2 točki
 Sklep: členi od a_1 do a_{18} niso v ϵ -okolici.....1 točka

Rešitev

9. Skupaj: 12 točk

9.1. (4 točke)

$$\frac{\binom{n}{2}}{n+6} = \frac{\binom{n}{3}}{\binom{n}{2}}$$

Upoštevanje, da je zaporedje geometrijsko, npr.1 točka

Poenostavitev do kvadratne enačbe, npr. $n^2 - 11n + 24 = 0$ 2 točki
 (Le zapis obeh binomskih simbolov z ulomki ... 1 točka.)

Rešitvi $n = 3$ in $n = 8$ 1 točka

9.2. (4 točke)

Zapisana enačba, npr. $\binom{n}{n-1} x^2 = \binom{n}{n-2} x^2$ 2 točki

(Le upoštevanje binomskega izreka, npr. da je koeficient pri x^k enak $\binom{n}{k} 2^{n-k}$... 1 točka.)

Rešitev $n = 2$ (*1+1) 2 točki

9.3. (4 točke)

Trikotnikov je $\binom{5}{2} x = 70$ (*1+1) 2 točki

Trapezov je $\binom{5}{2} x \left(\binom{4}{2} + \binom{3}{2} \right) = 90$ (*1+1) 2 točki

Rešitev

10. Skupaj: 12 točk

10.1. (3 točke)

Izračunan $q = \frac{1}{4}$ 1 točka

Izračunana vsota vrste $\frac{4}{3}$ 2 točki
 (Le uporaba formule ... 1 točka.)

10.2. (3 točke)

Zapisan splošni člen, npr. $a_n = 4^{-n+1}$ 1 točka

$a_{1007} = 2^{-2012}$ (*1+1) 2 točki

10.3. (3 točke)

Iskani členi zaporedja so $b_{35}, b_{36}, \dots, b_{50}$ 3 točke

(Približka za meji $n_1 = 34,2$ in $n_2 = 50,8$... (1+1) 2 točki.)

10.4. (3 točke)

Zapisan splošni člen $c_n = 2n - 2$ 1 točka

Izračunana vsota S_{30} 2 točki
 (Le uporaba formule za vsoto S_{30} aritmetičnega zaporedja ... 1 točka.)

Rešitev

11. Skupaj: 14 točk

11.1. (3 točke)

Upoštevan pogoji, da je zaporedje aritmetično, npr. $2 \times \frac{1}{2}(x-1) = (x-5) + (x^2-5)$...1 točka

Izračunani rešitvi, npr. $x_1 = 3$ in $x_2 = -3$ (1+1) 2 točki

11.2. (4 točke)

1. način

Izračunano ali upoštevano $a_1 = 17$, $a_{59} = 1003$, $a_{588} = 9996$ 1 točka

Zapisano ali upoštevano, da je $S = S_{588} - S_{58}$ *1 točka

Uporaba formule za vsoto n členov aritmetičnega zaporedja.....*1 točka

Izračunana vsota $S = 2914735$ 1 točka

2. način

Izračunano ali upoštevano $a_1 = 1003$, $a_{530} = 9996$, $d = 17$ 1 točka

Zapisano ali upoštevano, da je $S = S_{530}$ *1 točka

Uporaba formule za vsoto n členov aritmetičnega zaporedja.....*1 točka

Izračunana vsota $S = 2914735$ 1 točka

11.3. (4 točke)

Zapis ali upoštevanje, npr. $a = 7,5 - d$; $b = 7,5$; $c = 7,5 + d$ 1 točka

Uporaba Heronovega obrazca za ploščino trikotnika.....*1 točka

Izračun razlike, npr. $d = 1,75$ cm1 točka

Izračun stranic, npr. $a = 5,75$ cm, $c = 9,25$ cm1 točka

11.4. (3 točke)

Izračunan prvi člen $a_1 = 5$ 1 točka

Izračunana razlika $d = 4$ 1 točka

Izračunan splošni člen, npr. $a_n = 1 + 4n$ 1 točka

Rešitev

12. Skupaj: 12 točk

12.1. (2 točki)

Zapis ali upoštevanje, da stranice oblikujejo aritmetično zaporedje, npr.

$b-3$, b , $b+3$ 1 točka

Uporaba Pitagorovega izreka in izračun stranic $a = 9$, $b = 12$, $c = 15$ 1 točka

12.2. (3 točke)

Zapis ali upoštevanje, da so števila a , b , c zaporedni členi aritmetičnega

zaporedja, npr. $b-d$, b , $b+d$ 1 točka

Izračun diskriminante, npr. $D = 4d^2$ 1 točka

Utemeljitev, npr. $D \geq 0$ 1 točka

12.3. (3 točke)

Zapis ali upoštevanje, da so števila a , b , c zaporedni členi geometrijskega

zaporedja, npr. $b=aq$ in $c=aq^2$ 1 točka

Izračun diskriminante, $D = 0$ 1 točka

Odgovor, npr.: »Enačba ima eno rešitev.«.....1 točka

12.4. (4 točke)

Zapis ali upoštevanje lastnosti aritmetičnega in geometrijskega zaporedja.....1 točka

Zapis sistema dveh enačb z dvema neznankama, npr. $a + 2aq^2 - aq = 14$ in $aq + aq^2 = 12$ 1 točka

Rešitvi $2, 4, 8, 12$ in $\frac{25}{2}, \frac{15}{2}, \frac{9}{2}, \frac{3}{2}$ (1+1) 2 točki
(Uganjeno rešitev $2, 4, 8, 12$ točkujemo z 1 točko.)

Rešitev

13. Skupaj: 13 točk

13.1. (4 točke)

Vstavitve koordinat točke A v enačbo, npr. $6 = 2a^1$ 1 točka

Izračun $a = 3$ 1 točka

Vstavitve koordinat točke B v enačbo, npr. $2 = 2a^{1+b}$ 1 točka

Izračun $b = -1$ 1 točka

13.2. (1 točka)

Tabelirana funkcija1 točka

n	1	2	3	4
$h(n)$	2	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{27}$

13.3. (4 točke)

Izračun $q = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2 \cdot 3^{1-n-1}}{2 \cdot 3^{1-n}} = \frac{1}{3}$, za vsak $n \in \mathbb{N}$ 2 točki

(Le izračun q -ja, npr. $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{3}$... 1 točka.)

Nastavek, npr. $2 \cdot 3^{1-n} > 2 \cdot 10^{-2013}$ (zadošča enačba)1 točka

Odgovor: Takih členov je 42201 točka

13.4. (4 točke)

Ugotovitev, da je $S_1 = a_1$ 1 točka

Zapis ali upoštevanje $S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$ 1 točka

Upoštevanje indukcijske predpostavke $S_n = 3 - 3^{1-n}$ 1 točka

Popoln sklep1 točka

Rešitev

14. Skupaj: 13 točk

14.1. (4 točke)

1. način

Uporaba kosinusnega izreka, npr. $6,5^2 = 7^2 + x^2 - 2 \cdot 7 \cdot x \cdot \cos 60^\circ$ 1 točka

Urejena kvadratna enačba, npr. $x^2 - 7x + 6,75 = 0$ 1 točka

Rešitvi $|MN|_1 \approx 5,85$ in $|MN|_2 \approx 115$ (1 + 1) 2 točki

2. način

Uporaba sinusnega izreka, npr. $\frac{6,5}{\sin 60^\circ} = \frac{7}{\sin j}$ 1 točka

Izračunan kot $j_1 \approx 68,85^\circ$ ali $j_2 \approx 111,15^\circ$ 1 točka

Rešitvi $|MN|_1 \approx 5,85$ in $|MN|_2 \approx 115$ (1 + 1) 2 točki

14.2. (4 točke)

Napisane stranice, npr. $x-1$, x , $x+1$ 1 točka

Uporabljen kosinusni izrek, npr. $(x+1)^2 = (x-1)^2 + x^2 - 2x(x-1)\cos 120^\circ$ *1 točka

Izračunan $x = \frac{5}{2}$ 1 točka

Izračunane dolžine stranic $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{7}{2}$ 1 točka

14.3. (5 točk)

Uporaba sinusnega izreka, npr. $\frac{5}{4} = \frac{\sin 2b}{\sin b}$ 1 točka

Upoštevanje $\sin 2b = 2 \sin b \cos b$ 1 točka

Izračunan $\cos b = \frac{5}{8}$ 1 točka

Izračunana ploščina $S = 4,39$ 2 točki

(Le izračun potrebne količine, npr. kota g ali višine na a za izračun ploščine ... 1 točka.)

Rešitev

15. Skupaj: 13 točk

15.1. (3 točke)

Zapisana enačba $2^x + 2^{2x} = 2^{x+2}$ 1 točka

Ureditv enačbe v, npr. $2^{2x} = 3 \cdot 2^x$ ali $1 + 2^x = 4$ 1 točka

Rešitev, npr. $x = \log_2 3$ 1 točka

15.2. (3 točke)

Izračun $f(x) = 2^x \ln 2$ in $f'(x) = 2^x (\ln 2)^2$ 1 točka

Izračun leve strani $(2 + 2 \ln 2) \ln 2$ in izračun desne strani $2 \ln 2 + 2 (\ln 2)^2$ 1 točka

Ugotovitev, da sta izraza enaka1 točka

15.3. (3 točke)

Zapis ali upoštevanje formule za vsoto geometrijskega zaporedja1 točka

Ugotovitev ali upoštevanje, da je $a_1 = 2$, $k = 2$ 1 točka

Rezultat $S_{10} = 2046$ 1 točka

15.4. (4 točke)

Ugotovitev, da je vrsta $2^x + 2^{2x} + 2^{3x} + \dots$ geometrijska s količnikom $k = 2^x$. 1 točka

Rešitev: vrsta konvergira za $x < 0$ 1 točka

Zapis ali uporaba zveze $S = \frac{2^x}{1 - 2^x}$ 1 točka

Rešitev $x = -1$ 1 točka

Rešitev

16. Skupaj: 13 točk

16.1. (4 točke)

Izračun, npr. $a_n = (e^2)^{n-1}$ 1 točka

Izračun, npr. $b_n = \ln e^{2(n-1)} = 2n - 2$ 1 točka

Uporaba, npr. $d = b_{n+1} - b_n$ *1 točka

- Izračun $b_{n+1} - b_n = 2$ 1 točka
- 16.2. (2 točki)**
- Izračunana vsota $S_{100} = 9900$ 2 točki
- (Le zapis ali uporaba formule $S_n = \frac{n}{2}(2b_1 + (n-1)d)$ ali $S_n = \frac{n}{2}(b_1 + b_n)$... *1 točka.)
- 16.3. (3 točke)**
- Zapis, npr. $b_m = 2m - 2$, $b_n = 2n - 2$ (1 + 1) 2 točki
- Utemeljitev, da b_m in b_n nista tuji.....1 točka
- 16.4. (4 točke)**
- Zapisan predpis, npr. $p_n(x) = 2x + 4x^2 + \dots + 2nx^n$ 1 točka
- Razcep, npr. $p_n(x) = 2x(1 + 2x + \dots + nx^{n-1})$ 1 točka
- Ugotovitev, da je za vsak $x \geq 0$ $q(x) = 1 + 2x + \dots + nx^{n-1} > 0$ in zato
- q na $[0, \infty)$ nima ničel.....1 točka
- Utemeljitev, da je $x = 0$ edina ničla na danem intervalu.....1 točka

Rešitev

17. Skupaj: 13 točk

17.1. (3 točke)

- Izračunan obseg pravokotnika $o = 21$ cm2 točki
- (Le zapisana ali upoštevana zveza med stranicama in polmerom kroga, npr. $a^2 + b^2 = 4r^2$... 1 točka.)
- Ploščina pravokotnika predstavlja približno 61 % ploščine kroga.....1 točka
- 17.2. (6 točk)**

- Zapis ali upoštevanje formule $S = \frac{ef}{2}$ 1 točka
- Urejena kvadratna enačba, npr. $e^2 - 2e - 40 = 0$ 2 točki
- (Le zapis ali upoštevanje, da za diagonali velja, npr. $e - f = 2$... 1 točka.)
- Izračunani diagonali $e = \sqrt{41} + 1$ cm, $f = \sqrt{41} - 1$ cm1 točka
- Zapisana ali uporabljena zveza $a^2 = \left(\frac{e}{2}\right)^2 + \frac{ef}{2}$ 1 točka
- Izračunana stranica $a = \sqrt{21}$ cm1 točka

17.3. (4 točke)

- Zapis ali upoštevanje, da stranice tvorijo aritmetično zaporedje, npr. $a = b - 4$ in $c = b + 4$ 1 točka
- Zapis ali uporaba Heronovega obrazca.....1 točka
- Urejena enačba za izračun stranice, npr. $b^4 - 64b^2 - 49152 = 0$ ali $a^4 + 16a^3 + 32a^2 - 256a - 49920 = 0$ 1 točka
- Izračunane stranice $a = 12$ cm, $b = 16$ cm, $c = 20$ cm1 točka

(Če kandidat v tej nalogi pri nobenem rezultatu ni zapisal enot, se mu v celoti odšteje 1 točka.)

Rešitev

18. Skupaj: 14 točk

18.1. (6 točk)

Upoštevanje vsote zaporednih členov geometrijskega zaporedja,

npr. $a + aq + aq^2 = 52$ 1 točkaZapis ali uporaba treh členov aritmetičnega zaporedja $a+1, aq+8, aq^2-1$. 1 točka

Upoštevanje lastnosti zaporednih členov aritmetičnega zaporedja in zapis

enačbe, npr. $16 = aq^2 - 2aq + a$ *1 točka
(Zadošča tudi neurejena enačba.)Rešitvi sistema $q=3$ in $a=4$ (1 + 1) 2 točki
(Poenostavitev sistema na eno enačbo z eno neznanko ... *1 točka.)

Zapisani členi obeh zaporedij 4, 12, 36 in 5, 20, 351 točka

18.2. (3 točke)Ugotovitev, da je $b = 60^\circ$ 1 točkaZapis ali uporaba kosinusnega izreka za stranico b *1 točkaZapis, npr. $b^2 = a^2 - ac + c^2$ 1 točka**18.3. (5 točk)**Izračun rešitev enačbe $x_1 = m, x_2 = -m, x_3 = 1, x_4 = -1$ 2 točki
(Le rešitvi m in 1 ... 1 točka.)Zapisani zaporedni členi vsaj enega aritmetičnega zaporedja $-m, -1, 1, m$ ali
 $-1, -m, m, 1$ *1 točkaIzračunana vrednost $m=3$ 1 točkaIzračunana vrednost $m=\frac{1}{3}$ 1 točka

Rešitev

19. Skupaj: 13 točk**19.1. (3 točke)**Preoblikovanje enačbe v obliko, npr. $4\ln x = 2\ln(2x)$ 1 točkaAntilogaritmiranje, npr. $x^2 = 2x$ *1 točkaRešitev $x=2$ 1 točka
(Če kandidat ne izloči neustreznih rešitev, te točke ne dobi.)**19.2. (3 točke)**Nastavek, npr. $2\left(\ln\frac{1}{2} + \ln\frac{2}{3}\right)$ 1 točkaPreoblikovanje v npr. $2\ln\frac{1}{3}$ 1 točkaUgotovitev $2\ln\frac{1}{3} = f\left(\frac{1}{3}\right)$ 1 točka**19.3. (4 točke)**Dokaz pravilnosti trditve za $n=1$: $f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{1+1}\right)$ 1 točkaZapis ali upoštevanje vsote $n+1$ členov: $f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{3}{4}\right) + \dots + \left(\frac{n}{n+1}\right) + \left(\frac{n+1}{n+2}\right)$ *1 točka

Upoštevanje induksijske predpostavke, npr.

 $f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{3}{4}\right) + \dots + \left(\frac{n}{n+1}\right) + \left(\frac{n+1}{n+2}\right) = \left(\frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{n+1}{n+2}\right)$ 1 točka

Izračun in končna ugotovitev, npr

$$\cancel{f}\left(\frac{1}{n+1}\right) + f\left(\frac{n+1}{n+2}\right) = 2\ln\frac{1}{n+1} + 2\ln\frac{n+1}{n+2} = 2\ln\left(\frac{1}{n+2}\right) = \left(\frac{1}{n+2}\right) \dots\dots\dots 1 \text{ točka}$$

19.4. (3 točke)

Zapisana delna vsota $s_n = \cancel{f}\left(\frac{1}{2}\right) + \cancel{f}\left(\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{3}{4}\right) \cancel{+} \dots + \left(\frac{n}{n+1}\right) = \left(\frac{1}{n+1}\right) \dots\dots\dots 1 \text{ točka}$

Zapis ali uporaba $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n \dots\dots\dots *1 \text{ točka}$

Vrsta ne konvergira, saj limita $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ ne obstaja.1 točka