

KOMBINATORIKA IN VERJETNOSTNI RAČUN

1. Iz števk (cifer) $1, 2, 3$ sestavljamo različna števila.
 - 1.1. Koliko različnih trimestnih števil lahko sestavimo iz danih števk, če naj vsaka nastopi natanko enkrat?
(3 točke)
 - 1.2. Koliko različnih trimestnih števil lahko sestavimo iz danih števk, če se števke lahko ponavljajo?
(3 točke)
 - 1.3. Iz danih števk sestavljamo šestmestna števila. Koliko jih lahko sestavimo, če naj se števka 1 pojavi natanko enkrat, števka 2 pa vsaj trikrat?
(8 točk)
 - 1.4. Izračunajte vsoto vseh trimestnih števil iz 1.1 vprašanja te naloge.
Naj bodo x, y, z tri različne števke iz množice $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Dokažite, da je vsota vseh različnih trimestnih števil, ki jih je mogoče sestaviti iz števk x, y, z , deljiva s 37.
(8 točk)
2. Skupino 4 deklet in 5 fantov postavljamo v vrsto drugega za drugim (vedno vse osebe). Enemu dekletu je ime Ana.
 - 2.1. Na koliko načinov jih lahko razvrstimo, če mora stati Ana prva ali zadnja v vrsti?
(3 točke)
 - 2.2. Na koliko načinov jih lahko razvrstimo, če Ana ne sme biti niti prva niti zadnja v vrsti?
(3 točke)
 - 2.3. Osebe te skupine bomo dvakrat naključno postavili v vrsto. Kolikšna je verjetnost dogodka, da bo Ana vsaj enkrat prva v vrsti?
(6 točk)
 - 2.4. Kolikšna je verjetnost, da bo Ana stala med dvema fantoma, če osebe naključno razvrstimo (osebi tik pred Ano in tik za njo morata biti fanta)?
(8 točk)
3. Za srečelov so organizatorji izdali 500 srečk; 125 srečk prinese denarni dobitek, 300 srečk zadene razne uporabne predmete, druge pa so brez dobitka. Med vsemi srečkami naključno izberemo in kupimo tri. Na tri mesta natančno izračunajte verjetnost dogodkov A, B, C in D .
 - 3.1. A – vse tri srečke zadenejo (prinesejo dobitek).
(5 točk)
 - 3.2. B – ena srečka zadene denarni dobitek, ena uporabni predmet, ena pa je prazna.
(5 točk)
 - 3.3. C – vsaj ena srečka zadene.
(6 točk)
 - 3.4. D – vse tri srečke zadenejo, če vemo, da je vsaj ena izmed njih zadela.

(6 točk)

4. V posodi imamo 10 kroglic: 5 rdečih, 3 modre in 2 beli.

4.1. Iz posode naključno izvlečemo hkrati 4 kroglice. Izračunajte verjetnosti dogodkov:

- A – vse izvlečene kroglice so rdeče barve,
- B – dve izvlečeni kroglici sta rdeči, dve pa modri,
- C – vsaj ena izvlečena kroglica je bela.

(5 točk)

4.2. Iz posode naključno izvlečemo hkrati 2 kroglici. Izračunajte verjetnost dogodka, da sta obe izvlečeni kroglici modri, če vemo, da je vsaj ena od njiju modra.

(5 točk)

4.3. Iz posode izvlečemo vse kroglice in jih naključno postavimo v vrsto. Izračunajte verjetnost dogodka, da stojijo v vrsti vse tri modre kroglice skupaj.

(2 točki)

5. Košarkarsko moštvo sestavlja 12 igralcev: 5 branilcev, 4 krilni igralci in 3 centri. Enemu izmed branilcev je ime Sašo in enemu izmed centrov Primož. Preostali igralci imajo drugačna imena.

5.1. Na koliko načinov se lahko vsi igralci postavijo v vrsto, če mora Sašo stati v vrsti prvi in če morajo centri stati skupaj (drugih omejitev ni)?

(3 točke)

5.2. Na koliko načinov lahko trener sestavi prvo peterko, če morajo biti v njej 2 branilca, 2 krilna igralca in 1 center?

(2 točki)

5.3. Na treningu bo trener razvrstil igralce naključno v tri skupine s po 4 igralci: prva skupina bo vadila proste mete, druga skupina igro v obrambi, tretja skupina igro v napadu. Izračunajte verjetnost dogodkov:

- A – Sašo in Primož bosta vadila igro v obrambi,
- B – Sašo bo vadil proste mete, Primož pa igro v napadu.

(6 točk)

6. V spodnjih nalogah upoštevajte lastnosti binomskih simbolov.

6.1. Za katera naravna števila n so $n+6$, $\binom{n}{2}$, $\binom{n}{3}$ prvi trije členi geometrijskega zaporedja?

(4 točke)

6.2. Imamo polinom $p(x) = (2+x)^n = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$. Za katero naravno število n ($n > 1$) sta koeficienta a_{n-1} in a_{n-2} tega polinoma enaka?

(4 točke)

6.3. V ravnini so narisane tri različne vzporedne premice p , q in r ter 12 različnih točk: 5 točk leži na premici p , 4 točke na premici q , 3 točke pa na premici r . Koliko trikotnikov z oglišči v teh točkah lahko narišemo, če naj ena stranica trikotnika leži na premici p ? Koliko

trapezov z oglišči v teh točkah lahko narišemo, če naj ena osnovnica trapeza leži na premici P ?

(4 točke)

7. V vrečki je shranjenih devet listkov, na katerih so zapisana naravna števila od 1 do 9 (na vsakem listku drugo število). Andrej naključno izvleče iz vrečke dva listka hkrati. Naj bodo A , B in C ti dogodki:

A – Na obeh listkih, ki ju je izvlekel Andrej, sta zapisani lihi števili.

B – Vsota števil na listkih, ki ju je izvlekel Andrej, je liho število.

C – Zmnožek števil na listkih, ki ju je izvlekel Andrej, je število, deljivo z 10.

- 7.1. Izračunajte verjetnosti dogodkov A , B in C .

(7 točk)

- 7.2. Izračunajte pogojno verjetnost $P(C | B)$.

(2 točki)

- 7.3. Andrej naključno izvleče iz vrečke dva listka hkrati in ju vrne v vrečko. Ta poskus ponovi trikrat. Izračunajte verjetnost dogodka D , da je Andrej listek s številom 1 izvlekel natanko dvakrat.

(3 točke)

8. Množica $A_n = \{2, 5, 8, 11, \dots, 3n - 1\} = \{3k - 1; 1 \leq k \leq n\}$ ima n elementov.

- 8.1. Naj bo $n = 6$. Koliko je vseh preslikav iz množice A_6 v množico A_6 ? Koliko je med njimi bijektivnih preslikav?

(2 točki)

- 8.2. Za kateri n ima množica A_n 128 podmnožic?

(2 točki)

- 8.3. Za kateri n ima množica A_n petkrat več podmnožic s tremi elementi kakor podmnožic z dvema elementoma?

(3 točke)

- 8.4. Dokažite z matematično (popolno) indukcijo, da je vsota vseh elementov

množice A_n enaka $\frac{n(3n+1)}{2}$.

(4 točke)

9. V mošnjičku imamo 24 dragih kamnov: 18 smaragdov (draguljev zelene barve) in 6 rubinov (draguljev rdeče barve).

- 9.1. Iz mošnjička izvlečemo naključno drugega za drugim tri dragulje (in jih ne vračamo v mošnjiček). Izračunajte verjetnosti dogodkov:

A – izvlekli smo tri smaragde,

B – izvlekli smo najprej rubin, nato smaragd in nazadnje rubin.

(3 točke)

- 9.2. Iz mošnjička smo izvlekli naključno tri dragulje hkrati. Izračunajte verjetnost dogodka, da smo izvlekli natanko dva smaragda, če vemo, da smo izvlekli vsaj en rubin.

(5 točk)

- 9.3. Zlikovec nam je ukradel iz mošnjička neznano število smaragdov. Če potem izvlečemo iz mošnjička naključno dva dragulja hkrati, je verjetnost, da bomo izvlekli en smaragd in en rubin, enaka $\frac{1}{2}$. Koliko smaragdov so nam ukradli?

(5 točk)

10. V posodi imamo 10 kroglic: 5 rdečih, 3 modre in 2 beli.

- 10.1. Iz posode naključno izvlečemo hkrati 4 kroglice. Izračunajte verjetnosti dogodkov:

A – vse izvlečene kroglice so rdeče,
 B – dve izvlečeni kroglici sta rdeči, dve pa modri,
 C – vsaj ena izvlečena kroglica je bela.

(5 točk)

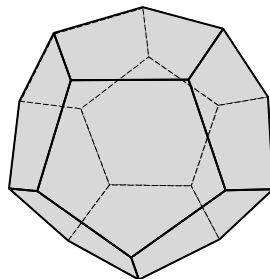
- 10.2. Iz posode naključno izvlečemo hkrati 2 kroglici. Izračunajte verjetnost dogodka, da sta obe izvlečeni kroglici modri, če vemo, da je vsaj ena od njiju modra.

(6 točk)

- 10.3. Iz posode izvlečemo vse kroglice in jih naključno postavimo v vrsto. Izračunajte verjetnost dogodka, da stojijo v vrsti vse tri modre kroglice skupaj.

(2 točki)

11. Dodekaeder je pravilni polieder, omejen z 12 pravilnimi petkotniki. Na vsako ploskev napišemo po eno izmed števil od 1 do 12, ki se ne ponavljajo.



- 11.1. Hkrati zakotalimo dva oštevilčena dodekaedra. Kolikšna je verjetnost dogodka A , da je vsota števil na obeh zgornjih ploskvah praštevilo, manjše ali enako 5?

(4 točke)

11.2. En oštevilčeni dodekaeder zakotalimo 20-krat. Kolikšna je verjetnost dogodka B , da se bo v teh 20 ponovitvah poskusa število 7 pojavilo na zgornji ploskvi natanko 3-krat? Rezultat zaokrožite na tri decimalna mesta.

(4 točke)

11.3. Naj bo dolžina roba dodekaedra enaka $a = 6$ cm. Izračunajte vsoto dolžin vseh robov in površino tega dodekaedra.

(6 točk)

12. Rešite nalogi iz verjetnosti.

12.1. Imamo 10 kroglic, ki jih označimo s števili od 1 do 10 (različne kroglice prejmejo različne oznake). Vse kroglice damo v vrečo in jih premešamo. Iz vreče nato naključno izvlečemo 2 kroglici.

Izračunajte verjetnost $P(A)$, da je vsota števil na izvlečenih kroglicah enaka 6.

(3)

Izračunajte verjetnost $P(B)$, da je vsota števil na izvlečenih kroglicah vsaj 6.

(2)

Izračunajte verjetnost $P(C)$, da je vsota števil na izvlečenih kroglicah enaka 6, če sta na izvlečenih kroglicah sodi števili.

(2)

Izračunajte verjetnost $P(D)$, da je vsota števil na izvlečenih kroglicah najmanjša možna.

(2)

(9 točk)

12.2. Imamo k kroglic, ki jih zaporedoma označimo s števili od 1 do k (različne kroglice prejmejo različne oznake). Vse kroglice damo v vrečo in jih premešamo. Iz vreče nato naključno izvlečemo 2 kroglici. Verjetnost $P(E)$, da je vsota števil na izvlečenih kroglicah najmanjša možna, je 0,1. Izračunajte število vseh kroglic k .

(5 točk)

13. Mali Simon, ki ne zna niti brati niti pisati, se igra z dedkovim pisalnim strojem. Ta ima 40 enako velikih tipk, na katerih so oznake: 25 velikih črk slovenske abecede, 10 števk in 5 simbolov.

13.1. Simon na slepo pritisne na eno izmed tipk. Kolikšna je verjetnost dogodka A , da bo pritisnil na eno izmed črk svojega imena?

(3 točke)

13.2. Simon na slepo natipka 5 znakov. Kolikšna je verjetnost dogodka B , da bo napisal svoje ime? Kolikšna je verjetnost dogodka C , da bo napisal vse črke svojega imena?

(4 točke)

13.3. Simon na slepo natipka 3 znake. Kolikšna je verjetnost dogodka D , da je natipkal tri enake številke, če vemo, da je najprej pritisnil tipko s sodo številko?

(3 točke)

13.4. Simon na slepo natipka 12 znakov. Kolikšna je verjetnost dogodka E , da je natanko desetkrat natipkal črko slovenske abecede?

(3 točke)

Rešitve

1. Skupaj: 22 točk

1.1. (3 točke)

$3! = 6$ 3 točke
(Za zapisanih pravih 6 števil ... 2 točki.)

1.2. (3 točke)

$3^3 = 27$ 3 točke

1.3. (8 točk)

$\frac{6!}{3!2!} + \frac{6!}{4!} + \frac{6!}{5!} = 60 + 30 + 6 = 96$ (2+2+2+2) 8 točk

1.4. (8 točk)

Vsota 1332 2 točki

Vsota, npr.

$(100x + 10y + z) + (100x + 10z + y) + (100y + 10x + z) + (100y + 10z + x) +$
 $+ (100z + 10x + y) + (100z + 10y + x) = 222(x + y + z) = 37 \times 6(x + y + z)$ 6 točk

(Zapis šestih števil ... 2 točki, desetiški zapis teh števil ... 2 točki, zapis z izpostavljenim številom 37 ... 2 točki.)

2. Skupaj: 20 točk:

2.1. (3 točke)

Število načinov, da Ana stoji na enem od skrajnih koncev vrste $8! + 8! = 80640$
..... (1+1+1) 3 točki

2.2. (3 točke)

Število načinov, da Ana ne stoji na nobenem od skrajnih koncev vrste

$9! - 2 \times 8! = 282240$ (ali $8 \times 7 \times 8! = 282240$) (1+1+1) 3 točki

2.3. (6 točk)

1. način

Verjetnost dogodka, da Ana ni prva v vrsti je $\frac{8}{9} \approx 0,89$ 2 točki

(Verjetnost, da je Ana prva v vrsti, je $\frac{1}{9}$... 1 točka.)

Verjetnost, da Ana nobenkrat ne bo prva v vrsti, je $\left(\frac{8}{9}\right)^2 = \frac{64}{81} \approx 0,79$ 2 točki

Verjetnost, da bo Ana vsaj enkrat prva v vrsti, je $\frac{17}{81} \approx 0,21$ (*1+1) 2 točki

2. način

Verjetnost, da je Ana dvakrat prva v vrsti, je $\left(\frac{1}{9}\right)^2 = \frac{1}{81} \approx 0,012$ 2 točki

Verjetnost, da je Ana natanko enkrat prva v vrsti, je $2 \times \frac{1}{9} \times \frac{8}{9} = \frac{16}{81} \approx 0,198$ (1+1) 2 točki

Iskana verjetnost je $\frac{17}{81} \approx 0,21$ (*1+1) 2 točki

2.4. (8 točk)

1. način

Vseh izidov je $9! = 362880$ 1 točka

Izbiri ugodnih izidov razdelimo na tri faze.....1 točka

Ana lahko stoji na 7 različnih mestih.....1 točka

Levega in desnega fanta lahko izbere na 5×4 načine.....1 točka

Preostale osebe lahko postavimo na preostala mesta na $6!$ načinov.....1 točka

Ugodnih izidov je torej $7 \times 5 \times 4 \times 6!$ 1 točka

Verjetnost dogodka je enaka $\frac{7 \times 5 \times 4 \times 6!}{9!} = \frac{5}{18} \approx 0,28$ 2 točki

2. način

Vseh izidov je $9! = 362880$ 1 točka

Izbiri ugodnih izidov razdelimo na dve fazi.....1 točka

Ana si lahko izbere levega in desnega soseda na $5 \times 4 = 20$ načinov.....1 točka

Ano in njena soseda (te tri osebe vzamemo skupaj) ter preostalih 6 oseb postavimo v vrsto na $7!$ načinov.....2 točki

Ugodnih izidov je $5 \times 4 \times 7!$ 1 točka

Verjetnost dogodka je enaka $\frac{5 \times 4 \times 7!}{9!} = \frac{5}{18} \approx 0,28$ 2 točki

3. Skupaj: 22 točk

3.1. (5 točk)

Ugotovitev, da je dobitnih srečk 4^{25} 1 točka

Možnih izidov je $\binom{500}{3}$ ali izračunano 207085001 točka

Ugodnih izidov za A je $\binom{425}{3}$ ali izračunano 127041001 točka

Verjetnost, npr. $P(A) = \frac{12704100}{20708500} \approx 0,613$ oz. 61,3 %(1+1) 2 točki

3.2. (5 točk)

Možnih izidov je $\binom{500}{3}$ ali izračunano 207085001 točka

Ugodnih izidov za B je, npr. $\binom{125}{1} \binom{300}{1} \binom{75}{1}$ ali izračunano 28125002 točki

Verjetnost, npr. $P(B) = \frac{2812500}{20708500} \approx 0,136$ oz. 13,6 %(1+1) 2 točki

3.3. (6 točk)

1. način

Uporaba zveze, npr. $P(C) = 1 - P(C^c)$ *1 točka

Ugodnih izidov za C^c je, npr. $\binom{75}{3}$ ali izračunano 675252 točki

Verjetnost $P(C^c) = \frac{67525}{20708500} \approx 0,00326$ (1+1) 2 točki

Izračun, npr. $P(C) \approx 0,997$ 1 točka

2. način

Ugodnih izidov za C je, npr. $\binom{425}{1}\binom{75}{2} + \binom{425}{2}\binom{75}{1} + \binom{425}{3}\binom{75}{0}$ ali izračunano
 $1179375 + 6757500 + 12704100 = 20640975$ (1+1+1+1) 4 točke

Verjetnost $P(C) = \frac{20640975}{20708500} \approx 0,997$ (1+1) 2 točki

3.4. (6 točk)

1. način

Zapis ali uporaba $P(D) = P(A/C)$ 2 točki

Uporaba formule za pogojno verjetnost $P(A/C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)}$ 2 točki

Ugotovitev ali uporaba $A \cap C = A$ 1 točka

Verjetnost $P(D) \approx 0,615$ 1 točka

2. način

Možnih izidov je (pri pogoju C) $\binom{500}{3} - \binom{75}{3} = 20640975$ (2+1) 3 točke

Ugodnih izidov za D je $\binom{425}{3} = 12704100$ (1+1) 2 točki

Verjetnost $P(D) \approx 0,615$ 1 točka

(Za zapis vseh rezultatov na napačno število mest v celoti odštejemo 1 točko.)

4. Skupaj: 12 točk

4.1. (5 točk)

Število vseh izidov: $\binom{10}{4} = 210$ 1 točka

Verjetnost dogodka A : $P(A) = \frac{\binom{5}{4}}{210} = \frac{5}{210} = \frac{1}{42}$ 1 točka

Verjetnost dogodka B : $P(B) = \frac{\binom{5}{2} \times \binom{3}{2}}{210} = \frac{30}{210} = \frac{1}{7}$ 1 točka

1. način

Verjetnost dogodka C : $P(C) = \frac{\binom{8}{4}}{210} = \frac{70}{210} = \frac{1}{3}$ 1 točka

Verjetnost dogodka C : $P(C) = 1 - P(C^c) = \frac{2}{3}$ 1 točka

2. način

Število izidov, ugodnih za dogodek C : $\binom{2}{1} \times \binom{8}{3} + \binom{2}{2} \times \binom{8}{2} = 2 \times 56 + 1 \times 28 = 140$ 1 točka

Verjetnost dogodka C : $P(C) = \frac{140}{210} = \frac{2}{3}$ 1 točka

4.2. (5 točk)

1. način

D – dogodek, da sta obe izvlečeni kroglici modri

E – dogodek, da je vsaj ena izvlečena kroglica modra

Število vseh izidov: $\binom{10}{2} = 45$ 1 točka

Verjetnost dogodka D : $P(D) = \frac{\binom{3}{2}}{45} = \frac{3}{45} = \frac{1}{15}$ 1 točka

Verjetnost dogodka E : $P(E) = \frac{\binom{7}{2}}{45} = \frac{21}{45} = \frac{7}{15}$ 1 točka

Verjetnost dogodka E : $P(E) = 1 - P(E) = \frac{8}{15}$ 1 točka

Izračun pogojne verjetnosti: $P(D|E) = \frac{P(D \cap E)}{P(E)} = \frac{P(D)}{P(E)} = \frac{1}{8}$ 1 točka

2. način

Število izidov, da je vsaj ena izvlečena kroglica modra (število vseh izidov pri pogoju, da je vsaj ena kroglica modra): $\binom{10}{2} - \binom{7}{2} = 45 - 21 = 24$..(1+1+1) 3 točke

Število izidov, da sta obe kroglici modri: $\binom{3}{2} = 3$ 1 točka

Izračun verjetnosti: $\frac{3}{24} = \frac{1}{8}$ 1 točka

4.3. (2 točki)

1. način (kroglice iste barve razlikujemo)

Število ugodnih izidov: $3! \times 8! = 6 \times 40320 = 241920$ 1 točka

Izračun verjetnosti: $\frac{3! \times 8!}{10!} = \frac{1}{15}$ 1 točka

2. način (kroglic iste barve ne razlikujemo)

Število ugodnih izidov: $\frac{8!}{5! \times 1! \times 2!}$ 1 točka

Izračun verjetnosti: $\frac{\frac{8!}{5! \times 1! \times 2!}}{\frac{10!}{5! \times 3! \times 2!}} = \frac{1}{15}$ 1 točka

5. Skupaj: 11 točk

5.1. (3 točke)

Število načinov, na katere se lahko igralci postavijo v vrsto: $9! \times 8! = 2177280$ (1+1+1) 3 točke

5.2. (2 točki)

Število možnih peterk: $\binom{5}{2} \times \binom{4}{2} \times \binom{3}{1} = 180$ (1+1) 2 točki

5.3. (6 točk)

1. način

Število vseh izidov, npr. $n = \binom{12}{4} \times \binom{8}{4} \times \binom{4}{4}$ ali $n = \frac{12!}{4! \times 4! \times 4!}$ ali $n = 34650$ 2 točki

Število izidov, ki so ugodni za dogodek A, npr. $m_A = \binom{10}{2} \times \binom{8}{4} \times \binom{4}{4}$ ali $m_A = \frac{10!}{2! \times 4! \times 4!}$ ali $m_A = 3150$ 1 točka

Verjetnost dogodka A: $P(A) = \frac{1}{11}$ (upoštevamo vsak pravilno zaokrožen rezultat).....1 točka

Število izidov, ki so ugodni za dogodek B, npr. $m_B = \binom{10}{3} \times \binom{7}{3} \times \binom{4}{4}$ ali $m_B = \frac{10!}{3! \times 3! \times 4!}$ ali $m_B = 4200$ 1 točka

Verjetnost dogodka B: $P(B) = \frac{4}{33}$ (upoštevamo vsak pravilno zaokrožen rezultat).....1 točka

2. način

Verjetnost dogodka A: $P(A) = \frac{4}{12} \times \frac{3}{11} = \frac{1}{11}$ 3 točke

Verjetnost dogodka B: $P(B) = \frac{4}{12} \times \frac{4}{11} = \frac{4}{33}$ 3 točke

6. Skupaj: 12 točk

6.1. (4 točke)

$$\frac{\binom{n}{2}}{n+6} = \frac{\binom{n}{3}}{\binom{n}{2}}$$

Upoštevanje, da je zaporedje geometrijsko, npr.1 točka

Poenostavitev do kvadratne enačbe, npr. $n^2 - 11n + 24 = 0$ 2 točki
(Le zapis obeh binomskih simbolov z ulomki ... 1 točka.)

Rešitvi $n = 3$ in $n = 8$ 1 točka

6.2. (4 točke)

Zapisana enačba, npr. $\binom{n}{n-1} \times 2 = \binom{n}{n-2} \times 2^2$ 2 točki

(Le upoštevanje binomskega izreka, npr. da je koeficient pri x^k enak $\binom{n}{k} 2^{n-k}$... 1 točka.)

Rešitev $n = 2$ (*1+1) 2 točki

6.3. (4 točke)

Trikotnikov je $\binom{5}{2} \times 7 = 70$ (*1+1) 2 točki

Trapezov je $\binom{5}{2} \times \left(\binom{4}{2} + \binom{3}{2} \right) = 90$ (*1+1) 2 točki

7. Skupaj: 12 točk

7.1. (7 točk)

Število vseh izidov, npr. $n = \binom{9}{2} = 36$ 1 točka

Število izidov, ugodnih za dogodek A , npr. $m_A = \binom{5}{2} = 10$ 1 točka

Verjetnost dogodka A , npr. $P(A) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18} \approx 0,2778$ 1 točka

Število izidov, ugodnih za dogodek B , npr. $m_B = \binom{5}{1} \times \binom{4}{1} = 20$ 1 točka

Verjetnost dogodka B , npr. $P(B) = \frac{20}{36} = \frac{5}{9} \approx 0,5556$ 1 točka

Število izidov, ugodnih za dogodek C , npr. $m_C = 4$ 1 točka

Verjetnost dogodka C , npr. $P(C) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} \approx 0,1111$ 1 točka

7.2. (2 točki)

Upoštevano, da je $B \cap C = C$ ali $P(B \cap C) = P(C)$ 1 točka

Izračunana pogojna verjetnost dogodka, npr. $P(C|B) = \frac{P(B \cap C)}{P(B)} = \frac{1}{5} = 0,2$ 1 točka

7.3. (3 točke)

Verjetnost dogodka, da je Andrej v eni ponovitvi poskusa izlekel listek s

številom 1, npr. $p = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$ 1 točka

Verjetnost dogodka D , npr. $P(D) = \binom{3}{2} \times \left(\frac{2}{9} \right)^2 \times \left(1 - \frac{2}{9} \right) = \frac{28}{243} \approx 0,1152$ (*1+1) 2 točka

8. Skupaj: 11 točk

8.1. (2 točki)

Vseh preslikav je $6^6 = 46656$1 točka

Bijekcij je $6! = 720$1 točka

8.2. (2 točki)

Ugotovitev, da ima množica A_n 2^n podmnožic.....1 točka

Ugotovitev $n = 7$ 1 točka

8.3. (3 točke)

Zapisana enačba, npr. $\binom{n}{3} = 5\binom{n}{2}$ 2 točki

(Le ugotovitev, da je podmnožic z močjo 2 enako $\binom{n}{2}$ ali z močjo 3 enako $\binom{n}{3}$... 1 točka.)

Izračunan $n = 17$ 1 točka

8.4. (4 točke)

Dokaz za $n = 1$ 1 točka

Upoštevanje induksijske predpostavke, npr. $s_{n+1} = s_n + a_{n+1}$ 1 točka

Izračunana vsota $n + 1$ števil, npr. $s_{n+1} = \frac{3n^2 + 7n + 4}{2}$ 1 točka

Zapisana vsota $n + 1$ števil, npr. $s_{n+1} = \frac{(n+1)(3(n+1)+1)}{2}$ 1 točka

9. Skupaj: 13 točk

9.1. (3 točke)

Število vseh izidov, npr. $n = 24 \times 3 \times 2 = 12144$ 1 točka

$P(A) = \frac{18 \times 7 \times 6}{12144} = \frac{102}{253} \approx 0,4032$ 1 točka

$P(B) = \frac{6 \times 8 \times 5}{12144} = \frac{45}{1012} \approx 0,0445$ 1 točka

9.2. (5 točk)

Naj bo C dogodek, da smo izvlekli natanko dva smaragda, in D dogodek, da smo izvlekli vsaj en rubin.

Število vseh izidov, npr. $n = \binom{24}{3} = 2024$ 1 točka

$P(D) = 1 - \frac{\binom{18}{3}}{2024} = 1 - \frac{102}{253} = \frac{151}{253} \approx 0,5968$ 1 točka

Zapis ali uporaba formule za pogojno verjetnost $P(C|D) = \frac{P(C \cap D)}{P(D)}$ 1 točka

Izračun $P(C) = \frac{\binom{18}{2} \times \binom{6}{1}}{2024} = \frac{459}{1012} \approx 0,4536$ 1 točka

Upoštevanje, da je $C \cap D = C$, in izračun $P(C|D) = \frac{459}{604} \approx 0,7599$ 1 točka

9.3. (5 točk)

Naj bo k število ukradenih smaragdov, E pa dogodek, da izvlečemo en smaragd in en rubin.

Število vseh izidov, npr. $n = \binom{24-k}{2} = \frac{(24-k)(23-k)}{2}$ 1 točka

Število ugodnih izidov za dogodek E , npr. $m = (18-k) \times 6$ 1 točka

Zapis enačbe, npr. $\frac{(18-k) \times 6 \times 2}{(24-k)(23-k)} = \frac{1}{2}$ 1 točka

Ureditev kvadratne enačbe, npr. $k^2 - 23k + 120 = 0$ *1 točka

Odgovor: Ukradli so nam 8 ali 15 smaragdov.....1 točka

10. Skupaj: 13 točk

10.1 (5 točk)

Število vseh izidov: $\binom{10}{4} = 210$ 1 točka

Verjetnost dogodka A : $P(A) = \frac{\binom{5}{4}}{210} = \frac{5}{210} = \frac{1}{42}$ 1 točka

Verjetnost dogodka B : $P(B) = \frac{\binom{5}{2} \times \binom{3}{2}}{210} = \frac{30}{210} = \frac{1}{7}$ 1 točka
1. način

Verjetnost dogodka C : $P(C) = \frac{\binom{8}{4}}{210} = \frac{70}{210} = \frac{1}{3}$ 1 točka

Verjetnost dogodka C : $P(C) = 1 - P(C) = \frac{2}{3}$ 1 točka
2. način

Število izidov, ugodnih za dogodek C : $\binom{2}{1} \times \binom{8}{3} + \binom{2}{2} \times \binom{8}{2} = 2 \times 56 + 1 \times 28 = 140$ 1 točka

Verjetnost dogodka C : $P(C) = \frac{140}{210} = \frac{2}{3}$ 1 točka

10.2 (6 točk)

1. način

Število vseh izidov: $\binom{10}{2} = 45$ 1 točka

Verjetnost dogodka D : $P(D) = \frac{\binom{3}{2}}{45} = \frac{3}{45} = \frac{1}{15}$ 1 točka
(D – dogodek, da sta obe izvlečeni kroglici modri.)

Verjetnost dogodka E : $P(E) = \frac{\binom{7}{2}}{45} = \frac{21}{45} = \frac{7}{15}$ 1 točka
(E – dogodek, da je vsaj ena izvlečena kroglica modra.)

Verjetnost dogodka E : $P(E) = 1 - P(D) = \frac{8}{15}$ 1 točka

Izračun pogojne verjetnosti: $P(D|E) = \frac{1}{8}$ 2 točki

(Le zapis ali uporaba formule $P(D|E) = \frac{P(D \cap E)}{P(E)}$... 1 točka.)

2. način

Število izidov, da je vsaj ena izvlečena kroglica modra (število vseh izidov pri

pogoju, da je vsaj ena kroglica modra): $\binom{10}{2} - \binom{7}{2} = 45 - 21 = 24$ ali

$\binom{3}{1} \binom{7}{1} + \binom{3}{2} = 21 + 3 = 24$ (1 + 1 + 1) 3 točke

Število izidov, da sta obe kroglici modri: $\binom{3}{2} = 3$ 1 točka

Izračun pogojne verjetnosti: $P(D|E) = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$ 2 točki

10.3 (2 točki)

1. način (kroglice iste barve razlikujemo)

Število ugodnih izidov: $3! \times 8! = 6 \times 40320 = 241920$ 1 točka

Izračun verjetnosti: $\frac{3! \cdot 8!}{10!} = \frac{1}{15}$ 1 točka

2. način (kroglic iste barve ne razlikujemo)

Število ugodnih izidov: $\frac{8!}{5! \cdot 1! \cdot 2!}$ 1 točka

Izračun verjetnosti: $\frac{\frac{8!}{5! \cdot 1! \cdot 2!}}{\frac{10!}{5! \cdot 3! \cdot 2!}} = \frac{1}{15}$ 1 točka

11. Skupaj: 14 točk

11.1. (4 točke)

Ugotovitev ali uporaba, da je vseh izidov 1441 točka

Ugotovitev ali uporaba, da je ugodnih izidov 72 točki

(Le ugotovitev, da mora biti vsota 2, 3 ali 5 ... 1 točka.)

Izračunana verjetnost $P(A) = \frac{7}{144}$ 1 točka

11.2. (4 točke)

$P(B) = \binom{20}{3} \left(\frac{1}{12}\right)^3 \left(\frac{11}{12}\right)^{17}$ (1 + 1 + 1) 3 točke

(Po ena točka za vsak faktor. Le formula za Bernoullijevo zaporedje ... 1 točka.)

$P(B) \approx 0,150$ 1 točka

11.3. (6 točk)

Izračun $l = \frac{5 \cdot 12 \cdot 2}{2} = 180 \text{ cm}$ 2 točki

(Le ugotovitev, da je vseh robov 30 ... 1 točka.)

1. način

Upoštevanje, da je površina dodekaedra P enaka vsoti plosčin 12 pravih 5-kotnikov1 točka

Zapis ali upoštevanje, da je ploščina pravih 5-kotnika, npr. $S_5 = \frac{5r^2 \sin 72^\circ}{2}$..1 točka

Upoštevanje $r = \frac{a}{2 \sin 36^\circ}$ (r je polmer petkotniku očrtanega kroga)1 točka

Izračunana površina, npr. $P = 12S_5 = 15a^2 \cot 36^\circ \approx 743,2462 \text{ cm}^2$ 1 točka

(Upoštevanje vsake pravilno zaokrožen rezultat.)

2. način

Upoštevanje, da je površina dodekaedra P enaka vsoti plosčin 12 pravih 5-kotnikov1 točka

Zapis ali upoštevanje, da je ploščina pravih petkotnika $S_5 = \frac{5av_a}{2}$ 1 točka

Upoštevanje, npr. $v_a = \frac{a \tan 54^\circ}{2}$ 1 točka

Izračunana površina, npr. $P = 12S_5 = 15a^2 \tan 54^\circ \approx 743,2462 \text{ cm}^2$ 1 točka

12. Skupaj: 14 točk

12.1. (9 točke)

Število vseh izidov, npr. $\binom{10}{2} = 45$ 1 točka

$$P(A) = \frac{2}{\binom{10}{2}} = \frac{2}{45} \dots\dots\dots 2 \text{ točki}$$

(Le število ugodnih izidov ... 1 točka.)

$$P(B) = \frac{41}{45} \dots\dots\dots 2 \text{ točki}$$

(Le število ugodnih izidov za dogodek B ali za dogodek B^c ... 1 točka.)

$$P(C) = \frac{1}{10} \dots\dots\dots 2 \text{ točki}$$

(Le uporaba formule za pogojno verjetnost ... 1 točka.)

$$P(D) = \frac{1}{45} \dots\dots\dots 2 \text{ točki}$$

(Le ugotovitev, da je najmanjša možna vsota enaka 3 ... 1 točka.)

12.2. (5 točke)

$$P(E) = \frac{1}{\binom{k}{2}} = \frac{1}{10}$$

Nastavek $\dots\dots\dots 2 \text{ točki}$

(Le število ugodnih ali število vseh izidov ... 1 točka.)

$$\text{Preureditev } k^2 - k - 20 = 0 \dots\dots\dots 2 \text{ točki}$$

(Le izračun binomskega simbola $\binom{k}{2}$... 1 točka.)

$$\text{Rešitev } k = 5 \dots\dots\dots 1 \text{ točka}$$

13. Skupaj: 13 točk

13.1. (3 točke)

Ugotovitev, da je vseh tipk (tj. vseh možnih izidov) 40.....1 točka

Ugotovitev, da je vseh črk v imenu (tj. vseh ugodnih izidov) 5.....1 točka

$$\text{Izračunana verjetnost dogodka } A, \text{ npr. } P(A) = \frac{5}{40} = \frac{1}{8} \dots\dots\dots 1 \text{ točka}$$

13.2. (4 točke)

$$\text{Izračunana verjetnost dogodka } B, \text{ npr. } P(B) = \frac{1}{40^5} \approx 9,7656 \times 10^{-9} \dots\dots\dots 2 \text{ točki}$$

(Le ugotovitev, da je vseh možnih besed s petimi znaki 40^5 ali da je ugodnih besed za dogodek B , $m_B = 1$... 1 točka.)

Ugotovitev, da je število besed, ki vsebujejo vse črke besede SIMON, enako 5!1 točka

$$\text{Izračunana verjetnost dogodka } C, \text{ npr. } P(C) = \frac{5!}{40^5} \approx 1,1719 \times 10^{-6} \dots\dots\dots 1 \text{ točka}$$

13.3. (3 točke)

$$\text{Ugotovitev, da je } P(D_1 \cap D_2) = \frac{5}{40^3} \dots\dots\dots 1 \text{ točka}$$

(Naj bo dogodek D_1 – Simon je pritisnil tri enake številke, in D_2 – Simon je najprej pritisnil sodo številko. Zadošča število ugodnih izidov za $D_1 \cap D_2$, $m_{D_1 \cap D_2} = 5$.)

$$\text{Ugotovitev, da je } P(D_2) = \frac{5}{40} = \frac{1}{8} \dots\dots\dots 1 \text{ točka}$$

(Zadošča število ugodnih izidov za dogodek D_2 , $m_{D_2} = 5 \times 40^2$.)

Izračunana verjetnost, npr. $P(D_1/D_2) = \frac{P(D_1 \cap D_2)}{P(D_2)} = \frac{1}{40^2} \approx 0,000625$ 1 točka
13.4. (3 točke)

Izračunana verjetnost, npr. $P(E) = \binom{12}{10} \left(\frac{5}{8}\right)^{10} \left(\frac{3}{8}\right)^2 \approx 0,08441$ (1 + 1 + 1) 3 točke

(Če kandidat ne izračuna rezultata, se mu odšteje 1 točka.)