

Matematika

Erazem Kokot, G 4. B

Pravila za odvajanje

- odvod konstante je 0
- funkcija je odvedljiva, kjer je zvezna

1. Odvod vsote/razlike funkcij

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$$

$$\text{npr. } (3x^2 + 2x + 3)' = 6x + 2$$

2. Odvod produkta funkcij

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

3. Odvod produkta konstante in funkcije

$$(k \cdot f(x))' = k \cdot f'(x)$$

4. Odvod količnika

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

5. Odvod sestavljene funkcije

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

6. Odvod inverzne funkcije

$$f(f^{-1}(x)) = x$$

$$(\sqrt[n]{m})' = (x^{\frac{m}{n}})' = \frac{m}{n} \cdot (x)^{\frac{m}{n}-1}$$

7. Odvod implicitno podane funkcije

$$(x^2 + y^2 = r^2)' = \begin{pmatrix} 2x + 2yy' = 0 \\ 2yy' = -2x \\ y' = -\frac{2x}{2y} \\ y' = -\frac{x}{y} \end{pmatrix}$$

8. Odvod kotnih in krožnih funkcij

1. Kotne

$f(x)$	$f'(x)$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$
$\cot(x)$	$-\frac{1}{\sin^2(x)}$

2. Krožne

$f(x)$	$f'(x)$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arccot}(x)$	$-\frac{1}{1+x^2}$

9. Odvod logaritemske in eksponentne funkcije

f	f'
$\log_a(x)$	$\frac{1}{x \cdot \ln(a)}$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
a^x	$a^x \cdot \ln(a)$
e^x	e^x

10. Višji odvod

$$f''(x) = (f'(x))'$$

$$f'''(x) = (f''(x))' = ((f'(x))')'$$

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$$

Uporaba odvodov

1. Enačba tangente in normale

Normala je premica, ki je pravokotna na tangento v dotikališču.

$$\text{tangenta} : k_t = f'(x_0)$$

$$y = k_t x + n$$

$$y = f'(x) \cdot x + n$$

$$T(x_0, f(x_0))$$

$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

$$\text{normala} : k_n = -\frac{1}{k_t} = -\frac{1}{f'(x_0)}$$

$$y = k_n \cdot x + n$$

2. Kot med krivuljo in koordinatnima osema

a) Abscisna os

$$T(x_0, 0)$$

$$\tan(\gamma) = f'(x_0)$$

b) Ordinarna os

$$T(0, f(0))$$

$$\tan(\gamma_1) = f'(0)$$

$$\gamma = 90^\circ - \gamma_1$$

3. Kot med krivuljama

Kot med krivuljama je kot med tangentama na krivulji v presečišču

presečišče : $P(x_0, y_0)$

$$k_1 = f'(x_0)$$

$$k_2 = g'(x_0)$$

$$\tan(\gamma) = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} \right|$$

4. Naraščanje in padanje funkcij

Funkcija **narašča**: Če povečamo x se poveča tudi y .

Funkcija **pada**: Če povečamo x se y manjša.

Funkcija *narašča* na intervalu (a, b) , če za vsak $x_1 < x_2$ iz tega intervala velja $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Funkcija *pada* na intervalu (a, b) , če za vsak $x_1 > x_2$ iz tega intervala velja $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Funkcija je **naraščajoča**, če povsod narašča.

Funkcija je **padajoča**, če povsod pada.

V točkah, kjer je **odvod (k) pozitiven**, funkcija **narašča**, kjer je **odvod (k) negativen** pa funkcija **pada**.

5. Stacionarne točke

Stacionarne točke so ničle odvoda.

$$f'(x) = 0$$

Vsaka stacionarna točka ni nujno prevoj, je pa vsak ekstrem stacionarna točka.

V stacionarni točki ima funkcija lokalni maksimum, lokalni minimum ali pa prevoj.

Lokalni ekstrem

Vse vrednosti v okolici so manjše/večje kot v lokalnem maksimumu/minimumu.

Lokalni maksimum: vse točke v okolici so **manjše** od maksimuma.

Lokalni minimum: vse točke v okolici so **večje** od minimuma.

6. Določanje vrste stacionarne točke s pomočjo odvoda

6.1 Lokalni maksimum

$$f'(x_0) = 0$$

levo od x: $f'(x) > 0$

desno od x: $f'(x) < 0$

6.2 Lokalni minimum

$$f'(x_0) = 0$$

levo od x: $f'(x) < 0$

desno od x: $f'(x) > 0$

6.3 Prevoj

Ko gremo prek stacionarne točke, se predznak odvoda ne spremeni.

7. Določanje vrste stacionarne točke s pomočjo drugega odvoda

$$f'(x_0) = 0, \text{ izračunamo } f''(x_0)$$

Če:

1. $f''(x_0) < 0$: Lokalni maksimum
2. $f''(x_0) > 0$: Lokalni minimum
3. $f''(x_0) = 0$: Ne vemo kaj je

8. Diferencial funkcije in aproksimacija z odvodom

$$\text{Definicija odvoda: } f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{df}{dx}$$

dx ... majhna sprememba x

df ... diferencial funkcije

Diferencial funkcije df v točki x_0 nam pove, za koliko se spremeni ordinata pri spremembi x za dx na tangenti v točki x_0 .

tl;dr: df pove za koliko se spremeni y , če se x spremeni za dx .

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot h$$

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + df$$